

Übungen zur Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel. Übungsblatt 1

Gegeben sind die Funktionen f und g mit

$$f := x \rightarrow 1 + \sqrt{x}$$

$$g := x \rightarrow 2 + x$$

Diese beiden Funktionen lassen sich auf verschiedene Weisen verknüpfen. Fünf dieser Verknüpfungen sollen Sie bilden:

Die Funktion ha soll die Summe aus f und g sein; die Funktion hb soll das Produkt aus f und g sein; die Funktion hc soll der Quotient aus f und g sein; die Funktion hd soll die Hintereinanderausführung von zuerst g und dann f sein; die Funktion he soll die Hintereinanderausführung von zuerst f und dann g sein;

Bestimmen Sie die Funktionsvorschriften dieser Verknüpfungen und berechnen Sie jeweils die ersten beiden Ableitungen von ha, hb, hc, hd und he.

Hinweis1: Die Quotientenbildung führt spätestens bei der zweiten Ableitung zu langen Termen. Nicht die Geduld verlieren!

Hinweis2: Die Berechnung aller zehn Ableitungen kann schon einmal 30 bis 60 Minuten dauern. Nicht aufgeben!

Hinweis3: Bei den Lösungen sind die Terme in einer Art und Weise aufgeschrieben, die vielleicht nicht ganz Ihre Reihenfolge ist. Versuchen Sie einfach Ihr Ergebnis in das der Lösung umzuformen.

Lösungen:

Zunächst die Verknüpfungen

$$ha = 3 + \sqrt{x} + x$$

$$hb = (1 + \sqrt{x})(2 + x)$$

$$hc = \frac{1 + \sqrt{x}}{2 + x}$$

$$hd = 1 + \sqrt{2 + x}$$

$$he = 3 + \sqrt{x}$$

Die ersten beiden Ableitungen von ha

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1$$

$$- \frac{1}{4x^{(3/2)}}$$

Die ersten beiden Ableitungen von hb

$$\frac{2+x}{2\sqrt{x}} + 1 + \sqrt{x}$$

$$-\frac{2+x}{4x^{(3/2)}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Die ersten beiden Ableitungen von hc

$$\frac{1}{2\sqrt{x}(2+x)} - \frac{1+\sqrt{x}}{(2+x)^2}$$

$$-\frac{1}{4x^{(3/2)}(2+x)} - \frac{1}{\sqrt{x}(2+x)^2} + \frac{2(1+\sqrt{x})}{(2+x)^3}$$

Die ersten beiden Ableitungen von hd

$$\frac{1}{2\sqrt{2+x}}$$

$$-\frac{1}{4(2+x)^{(3/2)}}$$

Die ersten beiden Ableitungen von he

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$-\frac{1}{4x^{(3/2)}}$$