

Übungen zur Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel. Übungsblatt 2

Gegeben sind die Funktionen f und g mit

$$f: x \rightarrow \sqrt{x}$$

$$g: x \rightarrow 2 + \sin(x)$$

Diese beiden Funktionen lassen sich auf verschiedene Weisen verknüpfen. Fünf dieser Verknüpfungen sollen Sie bilden:

Die Funktion h_a soll die Summe aus f und g sein; die Funktion h_b soll das Produkt aus f und g sein; die Funktion h_c soll der Quotient aus f und g sein; die Funktion h_d soll die Hintereinanderausführung von zuerst g und dann f sein; die Funktion h_e soll die Hintereinanderausführung von zuerst f und dann g sein;

Bestimmen Sie die Funktionsvorschriften dieser Verknüpfungen und berechnen Sie jeweils die ersten beiden Ableitungen von h_a , h_b , h_c , h_d und h_e .

Hinweis1: Die Quotientenbildung führt spätestens bei der zweiten Ableitung zu langen Termen. Nicht die Geduld verlieren!

Hinweis2: Die Berechnung aller zehn Ableitungen kann schon einmal 60 bis 90 Minuten dauern. Nicht aufgeben!

Hinweis3: Bei den Lösungen sind die Terme in einer Art und Weise aufgeschrieben, die vielleicht nicht ganz Ihre Reihenfolge ist. Versuchen Sie einfach Ihr Ergebnis in das der Lösung umzuformen.

Lösungen:

Zunächst die Verknüpfungen

$$h_a = \sqrt{x} + 2 + \sin(x)$$

$$h_b = \sqrt{x} (2 + \sin(x))$$

$$h_c = \frac{\sqrt{x}}{2 + \sin(x)}$$

$$h_d = \sqrt{2 + \sin(x)}$$

$$h_e = 2 + \sin(\sqrt{x})$$

Die ersten beiden Ableitungen von h_a

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \cos(x)$$

$$- \frac{1}{4x^{(3/2)}} - \sin(x)$$

Die ersten beiden Ableitungen von hb

$$\frac{2 + \sin(x)}{2 \sqrt{x}} + \sqrt{x} \cos(x)$$
$$- \frac{2 + \sin(x)}{4 x^{(3/2)}} + \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} \sin(x)$$

Die ersten beiden Ableitungen von hc

$$\frac{1}{2 \sqrt{x} (2 + \sin(x))} - \frac{\sqrt{x} \cos(x)}{(2 + \sin(x))^2}$$
$$- \frac{1}{4 x^{(3/2)} (2 + \sin(x))} - \frac{\cos(x)}{\sqrt{x} (2 + \sin(x))^2} + \frac{2 \sqrt{x} \cos(x)^2}{(2 + \sin(x))^3} + \frac{\sqrt{x} \sin(x)}{(2 + \sin(x))^2}$$

Die ersten beiden Ableitungen von hd

$$\frac{\cos(x)}{2 \sqrt{2 + \sin(x)}}$$
$$- \frac{\cos(x)^2}{4 (2 + \sin(x))^{(3/2)}} - \frac{\sin(x)}{2 \sqrt{2 + \sin(x)}}$$

Die ersten beiden Ableitungen von he

$$\frac{\cos(\sqrt{x})}{2 \sqrt{x}}$$
$$- \frac{\sin(\sqrt{x})}{4 x} - \frac{\cos(\sqrt{x})}{4 x^{(3/2)}}$$