

Übungen zur Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel. Übungsblatt 3

Gegeben sind die Funktionen f und g mit

$$f := x \rightarrow \cos(x)$$

$$g := x \rightarrow x^4 + x^2 + 1$$

Diese beiden Funktionen lassen sich auf verschiedene Weisen verknüpfen. Fünf dieser Verknüpfungen sollen Sie bilden:

Die Funktion h_a soll die Summe aus f und g sein; die Funktion h_b soll das Produkt aus f und g sein; die Funktion h_c soll der Quotient aus f und g sein; die Funktion h_d soll die Hintereinanderausführung von zuerst g und dann f sein; die Funktion h_e soll die Hintereinanderausführung von zuerst f und dann g sein;

Bestimmen Sie die Funktionsvorschriften dieser Verknüpfungen und berechnen Sie jeweils die ersten beiden Ableitungen von h_a , h_b , h_c , h_d und h_e .

Hinweis1: Die Quotientenbildung führt spätestens bei der zweiten Ableitung zu langen Termen. Nicht die Geduld verlieren!

Hinweis2: Die Berechnung aller zehn Ableitungen kann schon einmal 60 bis 90 Minuten dauern. Nicht aufgeben!

Hinweis3: Bei den Lösungen sind die Terme in einer Art und Weise aufgeschrieben, die vielleicht nicht ganz Ihre Reihenfolge ist. Versuchen Sie einfach Ihr Ergebnis in das der Lösung umzuformen.

Lösungen:

Zunächst die Verknüpfungen

$$h_a = \cos(x) + x^4 + x^2 + 1$$

$$h_b = \cos(x) (x^4 + x^2 + 1)$$

$$h_c = \frac{\cos(x)}{x^4 + x^2 + 1}$$

$$h_d = \cos(x^4 + x^2 + 1)$$

$$h_e = \cos(x)^4 + \cos(x)^2 + 1$$

Die ersten beiden Ableitungen von h_a

$$-\sin(x) + 4x^3 + 2x$$

$$-\cos(x) + 12x^2 + 2$$

Die ersten beiden Ableitungen von h_b

$$-\sin(x) (x^4 + x^2 + 1) + \cos(x) (4x^3 + 2x)$$

$$-\cos(x) (x^4 + x^2 + 1) - 2 \sin(x) (4x^3 + 2x) + \cos(x) (12x^2 + 2)$$

Die ersten beiden Ableitungen von hc

$$-\frac{\sin(x)}{x^4 + x^2 + 1} - \frac{\cos(x) (4x^3 + 2x)}{(x^4 + x^2 + 1)^2}$$

$$-\frac{\cos(x)}{x^4 + x^2 + 1} + \frac{2 \sin(x) (4x^3 + 2x)}{(x^4 + x^2 + 1)^2} + \frac{2 \cos(x) (4x^3 + 2x)^2}{(x^4 + x^2 + 1)^3} - \frac{\cos(x) (12x^2 + 2)}{(x^4 + x^2 + 1)^2}$$

Die ersten beiden Ableitungen von hd

$$-\sin(x^4 + x^2 + 1) (4x^3 + 2x)$$

$$-\cos(x^4 + x^2 + 1) (4x^3 + 2x)^2 - \sin(x^4 + x^2 + 1) (12x^2 + 2)$$

Die ersten beiden Ableitungen von he

$$-4 \cos(x)^3 \sin(x) - 2 \cos(x) \sin(x)$$

$$12 \cos(x)^2 \sin(x)^2 - 4 \cos(x)^4 + 2 \sin(x)^2 - 2 \cos(x)^2$$