Einige Übungsaufgaben zum Thema
„Exponentialfunktion und ihre Anwendungen“

Ich habe die Aufgaben sehr ausführlich gelöst, meistens noch eine Probe gemacht und alle Zwischenschritte aufgeschrieben. Das müsst ihr in der Arbeit nicht so ausführlich machen. Die Proben sollten ihr machen, wenn ihr genug Zeit habt.

Aufgabe 1 *Gib die Lösung folgender Gleichung an:*

$$4 \cdot 3^{(x-2)} = 2 \cdot 5^{3x}$$

Aufgabe 2 *Ein Gerücht verbreitet sich an der Schule. Innerhalb von fünf Stunden hat sich die Zahl der Informierten vervierfacht. Wie viele Menschen wissen es nach 8 Stunden, wenn es zu Beginn acht Leute wussten?*

Aufgabe 3 *Welcher Zinssatz muss mindestens zugrunde gelegt werden, damit sich ein Betrag von 6000,- Euro in 20 Jahren vedreifacht?*

Aufgabe 4 *Cäsium-137 hat eine Halbwertszeit von $T_H = 30$ Jahren.*

a) Wie viel Cäsium-137 ist von 10g zu Beginn der Messung noch nach 10 Jahren übrig?

b) Nach wie viel Jahren sind noch 8 Prozent übrig?

Lösungen

`Lösung zu Aufgabe 1:`
Da eine Lösung durch Vergleich der Exponenten hier nicht ersichtlich ist, wende ich den Zehnerlogarithmus an und löse die Gleichung nach x auf.

$$lg(4) + lg\left(3^{(x-2)}\right) = lg(2) + lg\left(5^{3x}\right)$$

Die Anwendung der Regel für das Rausziehen der Exponenten liefert:

$$lg(4) + (x-2) \cdot lg(3) = lg(2) + 3x \cdot lg(5)$$

Diese Logarithmen berechne ich mit Hilfe des Taschenrechners auf vier Stellen nach dem Komma:

$$0,6021 + (x-2) \cdot 0,4771 = 0,3010 + 3x \cdot 0,699$$

Nun löse ich auf der linken Seite die Klammer auf und berechne auf der rechten Seite $3x \cdot 0,699$ *als* $x \cdot 3 \cdot 0,699$*, also* $x \cdot 2,097$*:*

$$0,6021 + x \cdot 0,4771 - 2 \cdot 0,4771 = 0,3010 + x \cdot 2,097$$

Nun bringe ich alle Terme mit x auf die rechte Seite und alle Zahlen auf die linke Seite:

$$0,6021 - 2 \cdot 0,4771 - 0,3010 = 2,097x - 0,4771x$$

Jetzt fasse ich alle Zahlen und alle x-Werte zusammen:

$$-0,6531 = 1,6199x$$

Nun muss ich nur noch beide Seiten durch $1,6199$ *teilen:*

$$-0,4032 = x$$

Die Lösung ist also $x = -0,4032$*. Zur Probe setzte ich diesen Wert in*

$$4 \cdot 3^{(x-2)} = 2 \cdot 5^{3x}$$

ein:

$$4 \cdot 3^{(-0,4032-2)} = 2 \cdot 5^{3 \cdot -0,4032}$$

Ich erhalte auf beiden Seiten $0,285$*, meine Lösung ist also richtig.*

`Lösung zu Aufgabe 2:`
Die Werte für a und b aus der Funktionsgleichung $y = b \cdot a^x$ *kann ich ablesen:* $a = 4$*,* $b = 8$*. Ich muss aber bedenken, dass die Zeit zum vervierfachen*

nicht eine Stunde ist, sondern **fünf** *Stunden. Das muss ich noch in meine Funktionsgleichung mit einbauen:*

$$y = b \cdot a^{\frac{x}{5}} = 8 \cdot 4^{\frac{x}{5}}$$

*Um zu überprüfen (***diese Überprüfung müsst ihr in der Arbeit nicht machen!***), ob das richtig ist, berechne ich, wieviele Leute laut dieser Gleichung nach* **fünf** *Stunden informiert sind. Ich setze also für $x = 5$ ein:*

$$y = 8 \cdot 4^{\frac{5}{5}} = 8 \cdot 4^1 = 8 \cdot 4 = 32$$

Nach fünf Stunden hat sich die Zahl der Informierten also tatsächlich vervierfacht!

Um nun auszurechnen wie viele Menschen nach 8 Stunden informiert sind, muss ich in die Funktionsgleichung $y = 8 \cdot 4^{\frac{x}{5}}$ nur für die Stunden $x = 8$ einsetzen:

$$y = 8 \cdot 4^{\frac{8}{5}} = 8 \cdot 4^{1,6} \approx 8 \cdot 9,1896 = 73.5168$$

Nach acht Stunden sind also ungefähr 73 Leute informiert.

`Lösung zu Aufgabe 3:`

Die Gleichung für die Entwicklung des Geldes lautet:

$$G = K \cdot (1 + p)^x$$

Aus der Aufgabe folgen die Werte für $G = 18000$, $K = 6000$ und $x = 20$. Damit wird die Gleichung zu:

$$18000 = 6000 \cdot (1 + p)^{20}$$

Diese Gleichung löse ich nun nach p auf. Dazu teile ich zunächst durch 6000:

$$3 = (1 + p)^{20}$$

Um weiter aufzulösen, ziehe ich auf beiden Seiten die zwanzigste Wurzel (bzw. ich rechne alles hoch $\frac{1}{20}$):

$$\sqrt[20]{3} = 1 + p$$

Auf beiden Seiten -1 und dann $\sqrt[20]{3}$ mit dem Taschenrechner berechnen:

$$\sqrt[20]{3} - 1 = p$$

$$1,0565 - 1 = p$$

Also ist $p = 0,0565$, das bedeutet der gesuchte Prozentsatz ist 5,65 Prozent.
Probe:

$$6000 \cdot (1,0565)^{20} = 6000 \cdot 3,00 = 18000$$

Das ist eine Verdreifachung.

`Lösung zu Aufgabe 4:`

Ich stelle zunächst einmal die Funktionsgleichung $y = b \cdot a^x$ *auf; dazu muss ich die Werte für a und b bestimmen. Den Wert von b kann ich direkt aus der Aufgabenstellung entnehmen, da es zu Beginn 10g waren:* $b = 10$.
Um den Wachstumsfaktor a zu berechnen, nutze ich aus, dass ich die Halbwertszeit kenne. Ich weiss, dass es nach 30 Jahren ($x = 30$) *nur noch 5g sind, also:*

$$5 = 10 \cdot a^{30}$$

Diese Gleichung löse ich nun nach a auf, dazu teile ich zunächst durch 10:

$$\frac{1}{2} = a^{30}$$

Nun nehme ich die ganze Gleichung hoch $\frac{1}{30}$ *(ich könnte genauso gut auch die 30te-Wurzel ziehen):*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{30}} = a$$

Der Taschenrechner sagt: $a = 0,9772$. *Die Gleichung für die Abnahme der 10g Cäsium-137 ist also:*

$$y = 10 \cdot 0,9772^x$$

Teilaufgabe a) geht nun ganz einfach, ich muss für x nur 10 einsetzen:

$$y = 10 \cdot 0,9772^10 = 10 \cdot 0,794 = 7,94$$

Nach 10 Jahren sind also noch 7,94g Cäsium-137 vorhanden.

Die Teilaufgabe b) ist jetzt auch leicht. Acht Prozent von 10g sind $0,08 \cdot 10 = 0,8$. *Die Gleichung die es zu lösen gilt ist also:*

$$0,8 = 10 \cdot 0,9772^x$$

Die unbekannte Variable x steht für die gesuchte Zeit. Diese Gleichung muss ich nach x auflösen, dazu teile ich erst einmal durch 10:

$$0,08 = 0,9772^x$$

Das ist eine Exponentialgleichung (x steht ja im Exponenten). Um diese Gleichung zu lösen, nehme ich auf beiden Seiten den Zehnerlogarithmus:

$$lg(0,08) = lg(0,9772) \cdot x$$

Hier habe ich schon die Logarithmusregel für Exponenten verwendet. Die Logarithmen gibt der Taschnrechner aus:

$$-1,0969 = -0,01 \cdot x$$

Teilen durch $-0,01$:

$$x = 109,69$$

Nach ca. 110 Jahren ist also noch acht Prozente des Cäsiums-137 vorhanden.
Probe:
Ich setze $x = 110$ in die Funktionsgleichung ein:

$$y = 10 \cdot 0,9772^{110} = 10 \cdot 0,0791 = 0,79 \approx 0,8$$

Die Probe stimmt, nach 110 Jahren sind ca. 0,8g vorhanden.