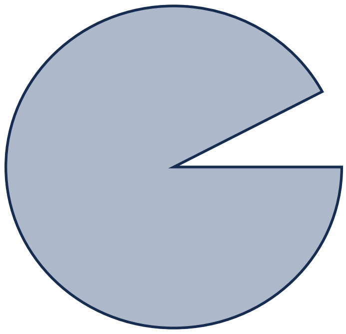
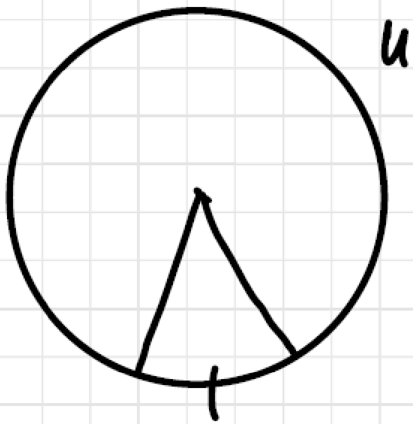
Aufgabe „Optimaler Kegel“



Auf einer kreisförmigen Papierscheibe ist der Mittelpunkt markiert.
Nun soll ein Stück herausgeschnitten werden. Die Schnitte gehen jeweils in einer geraden Linie vom Rand bis zum Mittelpunkt (siehe Skizze).
Die beiden Schnittlinien werden so aufeinander geklebt, dass ein Kegel entsteht.
Wie muss ich das herauszuschneidende Stück wählen, damit der Kegel das maximale Volumen hat?

Lösung (auch bei https://www.youtube.com/playlist?list=PLQLs-5C0ypbQiWSUZBmtHWh5yWmkldPQT)

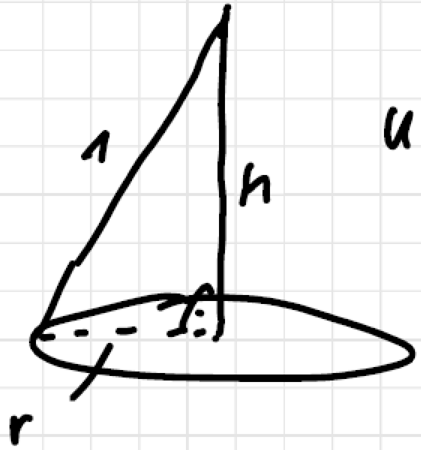
o.B.d.A: $R=1$



$$U=\alpha\cdot 2\pi$$

$1-\alpha$

$\alpha\in[0,1]$



$$U=2\pi r=\alpha\cdot 2\pi$$

$$2\pi r=\alpha\cdot 2\pi \quad |:2\pi$$

$$\alpha=r$$

$$1^2=h^2+r^2$$

$$1=h^2+\alpha^2 \quad |-\alpha^2$$

$$1-\alpha^2=h^2 \quad |\sqrt{}$$

$$\sqrt{1-\alpha^2}=h$$

$$V_K(r,h)=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h = V(\alpha)=\frac{1}{3}\pi\alpha^2\cdot\sqrt{1-\alpha^2}$$

$$V(\alpha) = \frac{1}{3}\pi\alpha^2 \cdot \sqrt{1-\alpha^2}$$

N.R.: $$\left(\sqrt{1-\alpha^2}\right)' = -2\alpha \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$= \frac{-2\alpha}{2\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$V'(\alpha) = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(2\alpha \cdot \sqrt{1-\alpha^2} + \alpha^2 \cdot \frac{-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \left(2\alpha\sqrt{1-\alpha^2} - \frac{\alpha^3}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}\cdot\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}} - \frac{\alpha^3}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{2\alpha \cdot (1-\alpha^2) - \alpha^3}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{2\alpha - 2\alpha^3 - \alpha^3}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{2\alpha - 3\alpha^3}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)$$

$$V'(\alpha) = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{2\alpha - 3\alpha^3}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right)$$

Notwendige Bedingung: $V'(\alpha) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\pi \left(\frac{2\alpha - 3\alpha^3}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right) = 0 \qquad \Big| : \frac{1}{3}\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\alpha - 3\alpha^3}{\sqrt{1-\alpha^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\alpha - 3\alpha^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha(2 - 3\alpha^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \quad \text{oder} \quad 2 - 3\alpha^2 = 0 \qquad \big| + 3\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \quad \text{oder} \quad 2 = 3\alpha^2 \qquad \big| : 3$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{2}{3} = \alpha^2 \qquad \big| \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{oder} \quad \alpha = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$\alpha = 0$ oder $\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ oder $\alpha = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\alpha = 0$: $V(0) = 0 \rightarrow$ kein Maximum

$\alpha = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\lightning$ $\alpha \in [0;1]$

$\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$: Für $\alpha = 0$ ist $V(\alpha) = 0$. Für $\alpha = 1$ ist $V(1) = 0$.

Zudem ist $V(\alpha)$ stetig in α. Also muss es zwischen $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ eine Stelle geben für die $V(\alpha)$ maximal wird. Dies ist nur für $\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ der Fall.

Das zugehörige Kreissegment hat den Öffnungswinkel $(1-\alpha) \cdot 360° \approx 66{,}07°$.

Für diesen Winkel wird der Kegel maximal.

Gewidmet den beiden Mathelehrern
Herr Zart und Herr Albert des
Privaten Gymnasiums der Zisterzienserabtei Marienstatt