Übungsaufgaben zur Integralrechung

1 Produktintegration

Zeigen Sie mit Hilfe der Produktintegration, dass die Integrale die angegebenen Werte annehmen.

PR1 $\int\limits_{-1}^{1} x \cdot e^{x} dx = 2 \cdot e^{(-1)}$

PR2 $\int\limits_{0}^{3} x \cdot (x-3)^{5} dx = \frac{-729}{14}$

PR3 $\int\limits_{0}^{0,5} 4x \cdot e^{(2x+1)} dx = e$

PR4 $\int\limits_{0}^{1} (2x+3)e^{(1-2x)} dx = 2e - 3e^{(-1)}$

PR5 $\int\limits_{-\pi}^{\pi} (x+1)\sin(x) dx = -\pi - 2$

Nastia $\int 4x \cdot e^{2x} dx = (2x \cdot e^{2x}) - e^{2x}$

Anna $\int 2x \cdot \cos(5x) dx = \frac{2x}{5}\sin(5x) + \frac{2}{25}\cos(5x)$

Nastia Bestimmen Sie $\int x^{2} \sin(ax) dx =$

Anna $\int\limits_{-1}^{1} 5x^{2} \cdot e^{2x} dx = -\frac{25}{4}e^{(-2)} + \frac{5}{4}e^{2}$

Amos $\int -x\cos(x) dx = -\cos(x) - x\sin(x)$

Amos $\int 4x^{2}\cos(x+5) dx = 4x^{2}\sin(x+5) - 8\sin(x+5) + 8x\cos(x+5)$

Konstantin $\int 4xe^{(2x+2)} dx = (-1+2x)e^{2x+2}$

Nima $\int\limits_{0}^{2} x^{2}\cos(x) dx = 0.154007508$

Nima $\int_{0}^{1} 2x \cdot e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}$

Lea $\int x^2 \sin(x+2) dx = -x^2 \cos(x+2) + 2\cos(x+2) + 2x \sin(x+2)$

Lea $\int x e^x dx = (-1+x)e^x$

Emmanuil $\int x^2 \sin(x) dx = -x^2 \cos(x) + 2\cos(x) + 2x \sin(x)$

Emmanuil $\int x^3 \cos(x) dx = x^3 \sin(x) + 3x^2 \cos(x) - 6\cos(x) - 6x \sin(x)$

Kasia $\int_{0}^{1} 7x \cdot e^{(x+1)} dx = 19.02797$

Kasia $\int_{0}^{1} e^x \cos(x) dx = 1.37802$

Belina $\int 7x \cdot e^{(3x)} dx = \frac{7}{9}(-1+3x)e^{3x}$

Belina $\int 9x \, \sin(ax) dx = -\frac{9(-\sin(ax) + x\cos(ax)a)}{a^2}$

Lisa $\int_{-1}^{1} x^2 \, e^x dx = -5e^{-1} + e$

Lisa $\int_{0}^{1} (2x^2+3) \, e^{(1-x)} dx = 3.96505$

Tobias $\int_{1}^{8} 8x \, \cos(x) dx = 51.1007$

Tobias $\int 2x^1 \, \cos(2x) dx = x^2 \sin(2x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + x\cos(2x)$

PR17 $\int dx =$

2 Substitutionsmethode

Zeigen mit der Substitutionsmethode, dass folgende Aussagen richtig sind.

Anna $\int 5\,\sin\left(3\,x-2\right)dx = -5/3\,\cos\left(3\,x-2\right)+C$

Elena $\int \left(4\,x+3\right)^{3}dx = \frac{1}{16}\,\left(4\,x+3\right)^{4}+C$

Elena $\int \frac{1}{2}\,\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{x^{2}}}dx = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}x^{2}}{\sqrt{x^{2}}}$

Nastia $\int\limits_{1}^{-2}\sqrt{x^{2}-x}\,\left(2\,x-1\right)dx = 9.797958972$

Nastia $\int\limits_{1}^{2}\sqrt{x^{2}-x}\,\left(2\,x-1\right)dx = 1.885618082$

Anna $\int -4\,\frac{x^{3}}{\sqrt{5-x^{4}}}dx = 2\,\sqrt{5-x^{4}}+C$

Amos $\int\limits_{0}^{2}\left(x+2\right)^{2}dx = \frac{56}{3}$

Amos $\int\limits_{1}^{\sqrt[3]{\pi}} 7\,\frac{x}{\left(x+4\right)^{3/2}}dx = 0.3338564014$

Konstantin $\int\limits_{3}^{7}\sqrt[4]{x+4}dx = 6.917381780$

Nima $\int \left(4\,x+3\right)^{4}dx = \frac{1}{20}\,\left(4\,x+3\right)^{5}$

Nima $\int \frac{x^{3}}{\left(x^{4}+8\right)^{3}}dx = -\frac{1}{8}\,\left(x^{4}+8\right)^{-2}$

Lea $\int \left(2-x\right)^{2}dx = -\frac{1}{3}\,\left(2-x\right)^{3}+C$

Emmanuil $\int \left(4\,x+5\right)^{4}dx = \frac{1}{20}\,\left(4\,x+5\right)^{5}$

Emmanuil $\int \frac{x^{4}}{\left(x^{5}+1\right)^{2}}dx = -\frac{1}{5}\,\left(x^{5}+1\right)^{-1}$

Kasia $\int\limits_{-1}^{1}\left(2-x\right)^{2}dx = 0$

Kasia $\int \left(\sin\left(x\right)\right)^{5}\cos\left(x\right)dx = \frac{1}{6}\,\left(\sin\left(x\right)\right)^{6}+C$

Belina $\int\limits_{0}^{5}\frac{x^{7}}{\left(25+x^{8}\right)^{3}}dx = 0.00009999999959$

Belina $\int (3\,x-9)^5\,dx = \frac{1}{18}\ (3\,x-9)^6$

Tobias $\int\limits_{-2}^{7} x\sqrt{x^2+2}dx = 116.5053038$

Tobias Diese Aufgabe könnte als deutlich schwieriger empfunden werden:

$$\int \frac{1}{16}\,\frac{x^7+18\,x^3}{x^4-16}dx = \frac{1}{64}\,x^4 + \frac{17}{32}\,\ln\left(x^4-16\right)+C$$

SB27 $\int\limits_{0}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\cos\left(x^2\right)dx = 1/2\,\sin\left(1/2\,\pi\right)$

SB28 $\int\limits_{2}^{-1} \frac{x}{\sqrt{x+2}}dx = -\frac{2}{3}$

SB29 $\int\limits_{0}^{3} (1+x)^{-2}\,dx = \frac{3}{4}$

SB30 $\int\limits_{0}^{1} (1+x)^{-2}\,dx = \frac{1}{2}$

SB31 $\int\limits_{0}^{4} \sqrt{9-2\,x}dx = \frac{26}{3}$

SB32 $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}dx = -\frac{2}{/}3\,\sqrt{1-x^3}$

SB33 $\int\limits_{1}^{2} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^2}}dx = 1.002462515$

SB34 $\int\limits_{0}^{5} x\sqrt{5-x}dx = \frac{20}{3}\,\sqrt{5}$

SB35 $\int\limits_{0}^{3} \frac{x}{\sqrt{5\,x+1}}dx = \frac{36}{25}$

SB36 $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = -\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$

SB37 $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\sqrt{a^2-x^2}$

SB38 $\int (\sin(x))^{-2}\,dx = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

SB39 $\int (\sin(x))^3\,(\cos(x))^3\,dx = -\frac{1}{6}\ (\sin(x))^2\,(\cos(x))^4 - \frac{1}{12}\ (\cos(x))^4$

3 Trigonometrische Funktionen

Berechnen Sie die Werte der folgenden Integrale und zeigen Sie so, dass die angegebenen Gleichungen richtig sind. Zur Berechnung benötigen Sie die Produktintegration oder die Substitutionsmethode.

TR1 $\int\limits_{-\pi}^{\pi} z\sin(z)dz = 2\pi$

TR3 $\int\limits_{-\pi}^{\pi} z^2\cos(z)dz = -4\pi$

TR4 $\int\limits_{-\pi}^{\pi} z^2\sin(z)dz = 0$

TR5 $\int\limits_{-\pi}^{\pi} z^3\sin(z)dz = -12\pi + 2\pi^3$

TR6 $\int\limits_{-\pi}^{\pi} z\cos(z)dz = 0$

TR7 $\int\limits_{-\pi}^{\pi} z\sin\left(\frac{1}{2}z\right)dz = 8$

TR8 $\int\limits_{-\pi}^{\pi} z\cos\left(\frac{1}{2}z\right)dz = 0$

TR9 $\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin(z))^2\,dz = \pi$

TR10 $\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin(z))^4\,dz = \frac{3}{4}\pi$

TR11 $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(z)\cos(z)dz = 0$

TR12 $\int\limits_{-\pi}^{\pi} dz =$

TR13 $\int\limits_{-\pi}^{\pi} dz =$

4 Uneigentliche Integrale

Bestimmen Sie, falls die Integrale existieren deren Wert.

UE1 $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$ (Lösung: $\frac{1}{2}$)

UE2 $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{4}{x^2} dx$ (Lösung: 2)

UE3 $\int\limits_{2}^{\infty} 8x^{-5} dx$ (Lösung: $\frac{1}{8}$)

UE4 $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ (Lösung: existiert nicht)

UE5 $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{(4-x)^3} dx$ (Lösung: $\frac{1}{8}$)

UE6 $\int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{1+x}{x^4} dx$ (Lösung: $-\frac{1}{12}$)

UE7 $\int\limits_{0}^{1} x + \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ (Lösung: 5/2)

UE8 $\int_0^{1/2\,\pi} (\cos(x))^{-2}$ Lösung: exisitiert nicht

UE9 $\int\limits_{a}^{b} dx$ (Lösung:)

UE10 $\int\limits_{a}^{b} dx$ (Lösung:)

UE11 $\int\limits_{a}^{b} dx$ (Lösung:)

UE12 $\int\limits_{a}^{b} dx$ (Lösung:)

5 Ohne Rechnung

Beweisen Sie, dass folgende Aussagen richtig sind, ohne die Integrale zu berechnen:

OR1 Für k ungerade ist $\int\limits_{-a}^{a} x^k dx = 0$

OR2 Für k gerade ist $\int\limits_{-a}^{a} x^k dx = 2\int\limits_{0}^{a} x^k dx$

OR3 $\int\limits_{0}^{2\pi} \sin(x)dx = 0$

OR4 $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(x)dx = 0$

OR5 $\int\limits_{x}^{x+2\pi} \sin(x)dx = 0$

OR6 $\int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}dx = 2\int\limits_{0}^{a} e^{-x^2}dx$

OR7 Ist der Graph einer Funktion f achsensymmetrisch zur y-Achse und ist $[-a, a] \in D_f$, so gilt:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

OR8 $\int dx =$

6 Flächeninhalte

FL1 Gegeben sind die Funktionen $f(x) = -\frac{5}{6}x^4 + 3a^2x^2$ und $\frac{x^4}{6} - a^2x^2$. Wie muss a gewählt werden, dass die Fläche zwischen den zwei Graphen zwischen den Schnittpunkte $64, 8$ ergibt?

(*Diese Aufgabe stammt von Chris, Bao, Katharina und Miltos*)

FL2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ und die Funktionenschar g_a mit $g_a(x) = \frac{1}{2}x^2 - a, a > 0$.

Wie muss a gewählt werden, damit die Fläche zwischen den Graphen von f und g_a den Flächeninhalt $\frac{32}{3}$ hat?

(*Diese Aufgabe stammt von Aaron, Thao, Anna-Marie und Jörg*)

FL3 Berechnen Sie den Inhalt A der Flächen zwischen den Graphen von f mit $f(x) = \sin(x)$ und g mit $g(x) = \cos(x)$ über dem Intervall $\left[0; \frac{3}{2}\pi\right]$.

(*Diese Aufgabe stammt von Wasil, Ugur, Enes und Polina*)

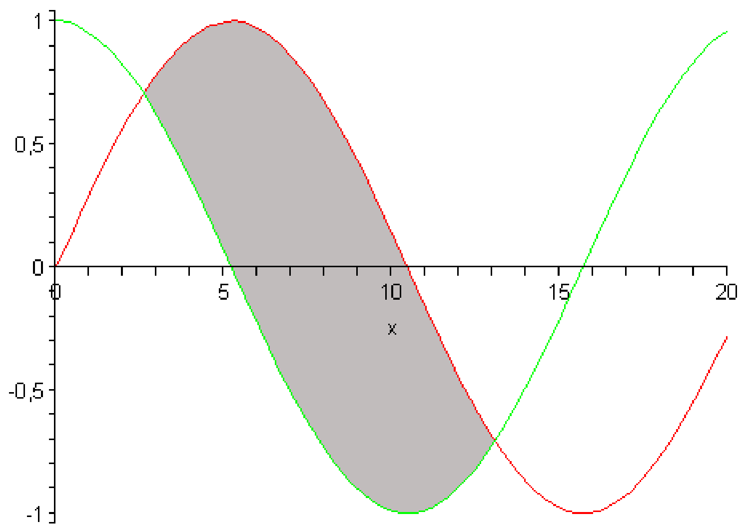
FL4 Es sei eine kubische Parabel der Form $f(x) = x^3$ und eine weitere verschobene quadratische Parabel $g(x) = -3x^2 + 4$ gegeben.

a) Bestimme die Fläche, die zwischen den beiden Graphen eingeschlossen ist.

b) In welchem Verhältnis teilt die Winkelhalbierende des zweiten und vierten Quadranten die eingeschlossene Fläche?

(*Diese Aufgabe stammt von Joscha, Micha, Sarah und Tanja*)

FL5 Gegeben sind die beiden Funktionenscharen f_a und g_a mit $f_a(x) = \sin(ax)$ und $g_a(x) = \cos(ax)$. Beide Werte für a sollen stets gleich sein.



Bestimmen Sie a so, dass die eingeschlossene Fläche den Flächeninhalt $A = \sqrt{12,5}$ hat.

(*Diese Aufgabe stammt von Robin, Serkan und Tolik*)

FL6 Wie muss a bestimmt sein, damit die Fläche zwischen den Graphen von f und der Funktionenschar g_a mit $f(x = -x^2 + 4$ und $g_a(x) = x^3 + ax$ den Flächeninhalt 5 hat? (*Diese Aufgabe stammt von Emre, Larissa, Cathryn und Justin*)

7 Lösungstipps

TR1
1. Produktintegration
2. z ableiten

TR2
1. Zweimalige Produktintegration
2. $\sin(z) = -\sin(z)\,, \cos(z) = \cos(-z)$
3. $\sin\pi = 0$, $\cos(\pi) = -1$

TR3
1. Zweimalige Produktintegration
2. $\sin(z) = -\sin(z)\,, \cos(z) = \cos(-z)$
3. $\sin\pi = 0$, $\cos(\pi) = -1$

TR4
1. Produktintegration
2. Ergebnisse von anderen Aufgaben verwenden

TR5
1. Produktintegration
2. z ableiten

TR6
1. Substitution $x = \frac{1}{2}$
2. Produktintegration
3. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

TR10
1. Produktintegration
2. $v' := \sin(z)$
3. Gleiche Integrale auf eine Seite des =-zeichens bringen
4. $\cos(\pi) = \cos(-\pi) = -1$

SB36
1. Substitution: $x = \frac{1}{z}$
2. $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

SB37
- Substitution: $z = a^2 - x^2$

SB38
1. Substitution: $z = \tan x$

2. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

FL1

1. Beide Graphen sind symmetrisch zur y-Achse.
2. Schnittpunkte bestimmen $(x_{S1} = 0, x_{S2} = 2a, x_{S3} = -2a)$.
3. Stammfunktion ist $-\frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{3}a^2x^2$.

FL2

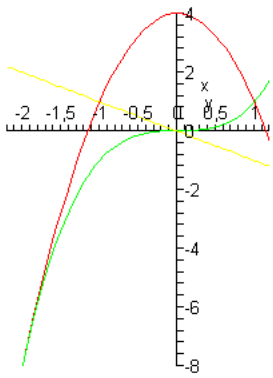
1. Die Graphen von f und g_a sind achsensymmetrisch zur y-Achse.
2. Schnittpunkte bestimmen $(x_{S1} = \sqrt{a}, x_{S2} = -\sqrt{a})$.
3. Stammfunktion ist $\frac{1}{3}x^3 - ax$.

FL3

1. Schnittpunkte bestimmen führt zu $x_S = \tan^{-1}(1)$. Dies liefert im angegebenen Intervall zwei Schnittpunkte $(x_{S1} = \frac{\pi}{4}, x_{S2} = \frac{5\pi}{4})$.
2. Fläche durch drei Integrale berechnen: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) - g(x)dx$, $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} g(x) - f(x)dx$, $\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) - g(x)dx$.
3. Bei der Bildung der jeweiligen Stammfunktion und deren Auswertung genau auf die Vorzeichen achten.

FL4

1. Schnittpunkte bestimmen $(SP_1(1/1), SP_2(-2/-8))$



2. Skizze
3. Hier ist $f(x) < g(x)$.
4. Winkelhalbierende einzeichnen, s. oben. Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit g bestimmen.
5. Berechnen von drei Flächen, die zusammen die Gesamtfläche ergeben.

8 Lösungen

FL1 $a = 1,5$.

FL2 $a = 4$.

FL3 $A \approx 2,2426$.

FL4 a) $6,75$, b) $\frac{2}{7}$.

FL5 $a = 2,5$.

FL6 $a = \frac{7}{12}$.