

Übungsaufgaben zur Integralrechnung

1 Produktintegration

Zeigen Sie mit Hilfe der Produktintegration, dass die Integrale die angegebenen Werte annehmen.

$$\text{PR1 } \int_{-1}^1 x \cdot e^x dx = 2 \cdot e^{(-1)}$$

$$\text{PR2 } \int_0^3 x \cdot (x - 3)^5 dx = \frac{-729}{14}$$

$$\text{PR3 } \int_0^{0,5} 4x \cdot e^{(2x+1)} dx = e$$

$$\text{PR4 } \int_0^1 (2x + 3)e^{(1-2x)} dx = 2e - 3e^{(-1)}$$

$$\text{PR5 } \int_{-\pi}^{\pi} (x + 1) \sin(x) dx = -\pi - 2$$

$$\text{Nastia } \int 4x \cdot e^{2x} dx = (2x \cdot e^{2x}) - e^{2x}$$

$$\text{Anna } \int 2x \cdot \cos(5x) dx = \frac{2x}{5} \sin(5x) + \frac{2}{25} \cos(5x)$$

$$\text{Nastia } \text{Bestimmen Sie } \int x^2 \sin(ax) dx =$$

$$\text{Anna } \int_{-1}^1 5x^2 \cdot e^{2x} dx = -\frac{25}{4}e^{(-2)} + \frac{5}{4}e^2$$

$$\text{Amos } \int -x \cos(x) dx = -\cos(x) - x \sin(x)$$

$$\text{Amos } \int 4x^2 \cos(x + 5) dx = 4x^2 \sin(x + 5) - 8 \sin(x + 5) + 8x \cos(x + 5)$$

$$\text{Konstantin } \int 4xe^{(2x+2)} dx = (-1 + 2x)e^{2x+2}$$

$$\text{Nima } \int_0^2 x^2 \cos(x) dx = 0.154007508$$

$$\text{Nima } \int_0^1 2x \cdot e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}$$

$$\text{Lea } \int x^2 \sin(x+2) dx = -x^2 \cos(x+2) + 2 \cos(x+2) + 2x \sin(x+2)$$

$$\text{Lea } \int x e^x dx = (-1+x)e^x$$

$$\text{Emmanuel } \int x^2 \sin(x) dx = -x^2 \cos(x) + 2 \cos(x) + 2x \sin(x)$$

$$\text{Emmanuel } \int x^3 \cos(x) dx = x^3 \sin(x) + 3x^2 \cos(x) - 6 \cos(x) - 6x \sin(x)$$

$$\text{Kasia } \int_0^1 7x \cdot e^{(x+1)} dx = 19.02797$$

$$\text{Kasia } \int_0^1 e^x \cos(x) dx = 1.37802$$

$$\text{Belina } \int 7x \cdot e^{(3x)} dx = \frac{7}{9}(-1+3x)e^{3x}$$

$$\text{Belina } \int 9x \sin(ax) dx = -\frac{9(-\sin(ax)+x \cos(ax)a)}{a^2}$$

$$\text{Lisa } \int_{-1}^1 x^2 e^x dx = -5e^{-1} + e$$

$$\text{Lisa } \int_0^1 (2x^2 + 3) e^{(1-x)} dx = 3.96505$$

$$\text{Tobias } \int_1^8 8x \cos(x) dx = 51.1007$$

$$\text{Tobias } \int 2x^1 \cos(2x) dx = x^2 \sin(2x) - \frac{1}{2} \sin(2x) + x \cos(2x)$$

$$\text{PR17 } \int dx =$$

2 Substitutionsmethode

Zeigen mit der Substitutionsmethode, dass folgende Aussagen richtig sind.

$$\text{Anna } \int 5 \sin(3x - 2) dx = -5/3 \cos(3x - 2) + C$$

$$\text{Elena } \int (4x + 3)^3 dx = \frac{1}{16} (4x + 3)^4 + C$$

$$\text{Elena } \int \frac{1}{2} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2}} dx = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}x^2}{\sqrt{x^2}}$$

$$\text{Nastia } \int_1^{-2} \sqrt{x^2 - x} (2x - 1) dx = 9.797958972$$

$$\text{Nastia } \int_1^2 \sqrt{x^2 - x} (2x - 1) dx = 1.885618082$$

$$\text{Anna } \int -4 \frac{x^3}{\sqrt{5-x^4}} dx = 2\sqrt{5-x^4} + C$$

$$\text{Amos } \int_0^2 (x+2)^2 dx = \frac{56}{3}$$

$$\text{Amos } \int_1^{\sqrt[3]{\pi}} 7 \frac{x}{(x+4)^{3/2}} dx = 0.3338564014$$

$$\text{Konstantin } \int_3^7 \sqrt[4]{x+4} dx = 6.917381780$$

$$\text{Nima } \int (4x + 3)^4 dx = \frac{1}{20} (4x + 3)^5$$

$$\text{Nima } \int \frac{x^3}{(x^4+8)^3} dx = -\frac{1}{8} (x^4 + 8)^{-2}$$

$$\text{Lea } \int (2-x)^2 dx = -\frac{1}{3} (2-x)^3 + C$$

$$\text{Emmanuel } \int (4x + 5)^4 dx = \frac{1}{20} (4x + 5)^5$$

$$\text{Emmanuel } \int \frac{x^4}{(x^5+1)^2} dx = -\frac{1}{5} (x^5 + 1)^{-1}$$

$$\text{Kasia } \int_{-1}^1 (2-x)^2 dx = 0$$

$$\text{Kasia } \int (\sin(x))^5 \cos(x) dx = \frac{1}{6} (\sin(x))^6 + C$$

$$\text{Belina } \int_0^5 \frac{x^7}{(25+x^8)^3} dx = 0.00009999999959$$

Belina $\int (3x - 9)^5 dx = \frac{1}{18} (3x - 9)^6$

Tobias $\int_{-2}^7 x\sqrt{x^2 + 2} dx = 116.5053038$

Tobias Diese Aufgabe könnte als deutlich schwieriger empfunden werden:

$$\int \frac{1}{16} \frac{x^7 + 18x^3}{x^4 - 16} dx = \frac{1}{64} x^4 + \frac{17}{32} \ln(x^4 - 16) + C$$

SB27 $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \cos(x^2) dx = 1/2 \sin(1/2 \pi)$

SB28 $\int_2^{-1} \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx = -\frac{2}{3}$

SB29 $\int_0^3 (1+x)^{-2} dx = \frac{3}{4}$

SB30 $\int_0^1 (1+x)^{-2} dx = \frac{1}{2}$

SB31 $\int_0^4 \sqrt{9-2x} dx = \frac{26}{3}$

SB32 $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} dx = -\frac{2}{7} 3 \sqrt{1-x^3}$

SB33 $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx = 1.002462515$

SB34 $\int_0^5 x\sqrt{5-x} dx = \frac{20}{3} \sqrt{5}$

SB35 $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{5x+1}} dx = \frac{36}{25}$

SB36 $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = -\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$

SB37 $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = -\sqrt{a^2-x^2}$

SB38 $\int (\sin(x))^{-2} dx = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

SB39 $\int (\sin(x))^3 (\cos(x))^3 dx = -\frac{1}{6} (\sin(x))^2 (\cos(x))^4 - \frac{1}{12} (\cos(x))^4$

3 Trigonometrische Funktionen

Berechnen Sie die Werte der folgenden Integrale und zeigen Sie so, dass die angegebenen Gleichungen richtig sind. Zur Berechnung benötigen Sie die Produktintegration oder die Substitutionsmethode.

$$\text{TR1} \quad \int_{-\pi}^{\pi} z \sin(z) dz = 2\pi$$

$$\text{TR3} \quad \int_{-\pi}^{\pi} z^2 \cos(z) dz = -4\pi$$

$$\text{TR4} \quad \int_{-\pi}^{\pi} z^2 \sin(z) dz = 0$$

$$\text{TR5} \quad \int_{-\pi}^{\pi} z^3 \sin(z) dz = -12\pi + 2\pi^3$$

$$\text{TR6} \quad \int_{-\pi}^{\pi} z \cos(z) dz = 0$$

$$\text{TR7} \quad \int_{-\pi}^{\pi} z \sin\left(\frac{1}{2}z\right) dz = 8$$

$$\text{TR8} \quad \int_{-\pi}^{\pi} z \cos\left(\frac{1}{2}z\right) dz = 0$$

$$\text{TR9} \quad \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(z))^2 dz = \pi$$

$$\text{TR10} \quad \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(z))^4 dz = \frac{3}{4}\pi$$

$$\text{TR11} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(z) \cos(z) dz = 0$$

$$\text{TR12} \quad \int_{-\pi}^{\pi} dz =$$

$$\text{TR13} \quad \int_{-\pi}^{\pi} dz =$$

4 Uneigentliche Integrale

Bestimmen Sie, falls die Integrale existieren deren Wert.

$$\text{UE1 } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx \text{ (Lösung: } \frac{1}{2}\text{)}$$

$$\text{UE2 } \int_2^{\infty} \frac{4}{x^2} dx \text{ (Lösung: } 2\text{)}$$

$$\text{UE3 } \int_2^{\infty} 8x^{-5} dx \text{ (Lösung: } \frac{1}{8}\text{)}$$

$$\text{UE4 } \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ (Lösung: existiert nicht)}$$

$$\text{UE5 } \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(4-x)^3} dx \text{ (Lösung: } \frac{1}{8}\text{)}$$

$$\text{UE6 } \int_{-\infty}^{-2} \frac{1+x}{x^4} dx \text{ (Lösung: } -\frac{1}{12}\text{)}$$

$$\text{UE7 } \int_0^1 x + \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ (Lösung: } 5/2\text{)}$$

$$\text{UE8 } \int_0^{1/2\pi} (\cos(x))^{-2} \text{ Lösung: existiert nicht}$$

$$\text{UE9 } \int_a^b dx \text{ (Lösung:)}$$

$$\text{UE10 } \int_a^b dx \text{ (Lösung:)}$$

$$\text{UE11 } \int_a^b dx \text{ (Lösung:)}$$

$$\text{UE12 } \int_a^b dx \text{ (Lösung:)}$$

5 Ohne Rechnung

Beweisen Sie, dass folgende Aussagen richtig sind, ohne die Integrale zu berechnen:

OR1 Für k ungerade ist $\int_{-a}^a x^k dx = 0$

OR2 Für k gerade ist $\int_{-a}^a x^k dx = 2 \int_0^a x^k dx$

OR3 $\int_0^{2\pi} \sin(x) dx = 0$

OR4 $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) dx = 0$

OR5 $\int_x^{x+2\pi} \sin(x) dx = 0$

OR6 $\int_{-a}^a e^{-x^2} dx = 2 \int_0^a e^{-x^2} dx$

OR7 Ist der Graph einer Funktion f achsensymmetrisch zur y-Achse und ist $[-a, a] \in D_f$, so gilt:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

OR8 $\int dx =$

6 Flächeninhalte

FL1 Gegeben sind die Funktionen $f(x) = -\frac{5}{6}x^4 + 3a^2x^2$ und $\frac{x^4}{6} - a^2x^2$.
Wie muss a gewählt werden, dass die Fläche zwischen den zwei Graphen zwischen den Schnittpunkte 64, 8 ergibt?

(Diese Aufgabe stammt von Chris, Bao, Katharina und Miltos)

FL2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ und die Funktionenschar g_a mit $g_a(x) = \frac{1}{2}x^2 - a, a > 0$.

Wie muss a gewählt werden, damit die Fläche zwischen den Graphen von f und g_a den Flächeninhalt $\frac{32}{3}$ hat?

(Diese Aufgabe stammt von Aaron, Thao, Anna-Marie und Jörg)

FL3 Berechnen Sie den Inhalt A der Flächen zwischen den Graphen von f mit $f(x) = \sin(x)$ und g mit $g(x) = \cos(x)$ über dem Intervall $[0; \frac{3}{2}\pi]$.

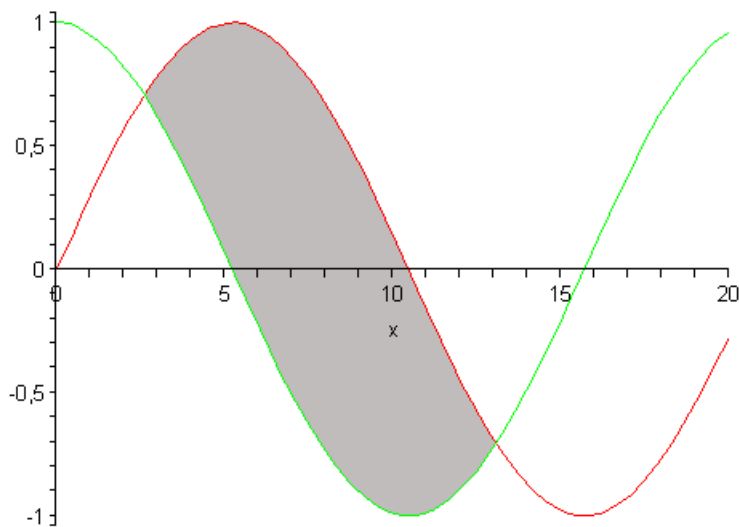
(Diese Aufgabe stammt von Wasil, Ugur, Enes und Polina)

FL4 Es sei eine kubische Parabel der Form $f(x) = x^3$ und eine weitere verschobene quadratische Parabel $g(x) = -3x^2 + 4$ gegeben.

- a) Bestimme die Fläche, die zwischen den beiden Graphen eingeschlossen ist.
- b) In welchem Verhältnis teilt die Winkelhalbierende des zweiten und vierten Quadranten die eingeschlossene Fläche?

(Diese Aufgabe stammt von Joscha, Micha, Sarah und Tanja)

FL5 Gegeben sind die beiden Funktionenscharen f_a und g_a mit $f_a(x) = \sin(ax)$ und $g_a(x) = \cos(ax)$. Beide Werte für a sollen stets gleich sein.



Bestimmen Sie a so, dass die eingeschlossene Fläche den Flächeninhalt $A = \sqrt{12,5}$ hat.

(Diese Aufgabe stammt von Robin, Serkan und Tolik)

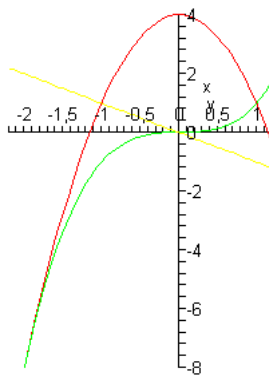
FL6 Wie muss a bestimmt sein, damit die Fläche zwischen den Graphen von f und der Funktionenschar g_a mit $f(x) = -x^2 + 4$ und $g_a(x) = x^3 + ax$ den Flächeninhalt 5 hat? (*Diese Aufgabe stammt von Emre, Larissa, Cathryn und Justin*)

7 Lösungstipps

- TR1 1. Produktintegration
2. z ableiten
- TR2 1. Zweimalige Produktintegration
2. $\sin(z) = -\sin(-z)$, $\cos(z) = \cos(-z)$
3. $\sin \pi = 0$, $\cos(\pi) = -1$
- TR3 1. Zweimalige Produktintegration
2. $\sin(z) = -\sin(-z)$, $\cos(z) = \cos(-z)$
3. $\sin \pi = 0$, $\cos(\pi) = -1$
- TR4 1. Produktintegration
2. Ergebnisse von anderen Aufgaben verwenden
- TR5 1. Produktintegration
2. z ableiten
- TR6 1. Substitution $x = \frac{1}{2}$
2. Produktintegration
3. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- TR10 1. Produktintegration
2. $v' := \sin(z)$
3. Gleiche Integrale auf eine Seite des $=$ -zeichens bringen
4. $\cos(\pi) = \cos(-\pi) = -1$
- SB36 1. Substitution: $x = \frac{1}{z}$
2. $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$
- SB37 – Substitution: $z = a^2 - x^2$
- SB38 1. Substitution: $z = \tan x$

2. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

- FL1
1. Beide Graphen sind symmetrisch zur y-Achse.
 2. Schnittpunkte bestimmen ($x_{S1} = 0, x_{S2} = 2a, x_{S3} = -2a$).
 3. Stammfunktion ist $-\frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{3}a^2x^2$.
- FL2
1. Die Graphen von f und g_a sind achsensymmetrisch zur y-Achse.
 2. Schnittpunkte bestimmen ($x_{S1} = \sqrt{a}, x_{S2} = -\sqrt{a}$).
 3. Stammfunktion ist $\frac{1}{3}x^3 - ax$.
- FL3
1. Schnittpunkte bestimmen führt zu $x_S = \tan^{-1}(1)$. Dies liefert im angegebenen Intervall zwei Schnittpunkte ($x_{S1} = \frac{\pi}{4}, x_{S2} = \frac{5\pi}{4}$).
 2. Fläche durch drei Integrale berechnen: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) - g(x) dx, \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} g(x) - f(x) dx, \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) - g(x) dx$.
 3. Bei der Bildung der jeweiligen Stammfunktion und deren Auswertung genau auf die Vorzeichen achten.
- FL4
1. Schnittpunkte bestimmen ($SP_1(1/1), SP_2(-2/-8)$)



2. Skizze
3. Hier ist $f(x) < g(x)$.
4. Winkelhalbierende einzeichnen, s. oben. Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit g bestimmen.
5. Berechnen von drei Flächen, die zusammen die Gesamtfläche ergeben.

8 Lösungen

FL1 $a = 1, 5$.

FL2 $a = 4$.

FL3 $A \approx 2, 2426$.

FL4 a) 6, 75, b) $\frac{2}{7}$.

FL5 $a = 2, 5$.

FL6 $a = \frac{7}{12}$.