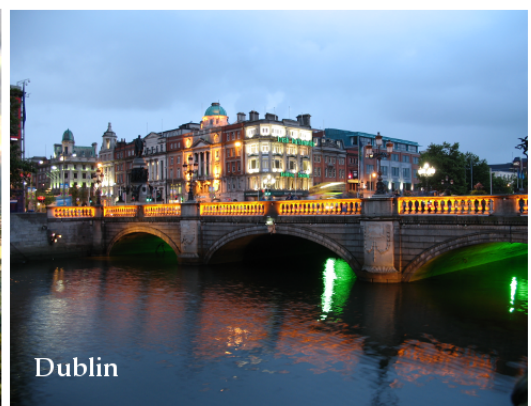




Aufgaben von Schülern für Schüler
 Kurvendiskussionen von e-Funktionen
 Aufgaben der Hauptstadtgruppen



Die folgenden Aufgaben wurden im Dezember 2011 von Schülern des Leistungskurses Q1 Müller an der Elisabethenschule in Frankfurt am Main und Ihrem Lehrer, Axel Müller, ersonnen und bearbeitet. Die Schüler arbeiteten in Gruppen von drei bis vier Schülern, jede Gruppe hatte eine Hauptstadt als Namenspatronin. Abgetippt und gete χ t wurden die Aufgaben von Axel Müller, er ist somit auch allein für Tipp- und Rechtschreibfehler verantwortlich.

1 Aufgaben

Bei den folgenden Aufgaben soll jeweils eine Kurvendiskussion durchgeführt werden, hier ist damit gemeint: Angabe des maximalen Definitionsbereiches D_f und des Wertebereichs W_f , Untersuchung auf Symmetrie, Angabe der Nullstellen und Angabe von Extrem- und Wendepunkten. Anschließend soll der Graph von f unter Verwendung der Ergebnisse der Kurvendiskussion gezeichnet werden.

Weiterhin soll jeweils eine Flächenberechnungsaufgabe zur vorgegebenen Funktion bearbeitet werden. Diese sind unterschiedlich anspruchsvoll, von ^(*) bis ^(***).

Aufgabe 1 (Gruppe Anchorage - Anna, Chris, Emre, Robin) Die Funktion f sei gegeben durch $f(x) = e^{-x^2}$. Führen Sie eine Kurvendiskussion durch. Der Graph von f , die Wendetangente des am weitesten rechts gelegenen Wendepunktes und die y -Achse schließen gemeinsam ein Flächenstück A ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Flächenstückes.^(**)

Aufgabe 2 (Gruppe Brüssel - Bao, Justin, Michael, Tanja) Die Funktion f sei gegeben durch $f(x) = x \cdot e^{1-2x}$. Führen Sie eine Kurvendiskussion durch. Der Graph von f , die Wendetangente und die x -Achse schließen ein nach rechts offenes Flächenstück A ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Flächenstückes.^(**)

Aufgabe 3 (Gruppe Caracas - Enes, Katharina, Miltos, Tolik) Die Funktion f sei gegeben durch $f(x) = x^2 \cdot e^{2x-1}$. Führen Sie eine Kurvendiskussion durch. Die Normale im Hochpunkt unterteilt eine vom Graphen von f und der x -Achse umschlossene Fläche. In welchem Verhältnis wird diese Fläche geteilt?^(**)

Aufgabe 4 (Gruppe Dublin - Cathryn, Jörg, Sarah, Wasil) Die Funktion f sei gegeben durch $f(x) = x^2 \cdot e^{1-x^2}$. Führen Sie eine Kurvendiskussion durch. Der Graph von f , die Wendetangente des am weitesten rechts gelegenen Wendepunktes und die y -Achse schließen gemeinsam eine Fläche A ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.^(*)

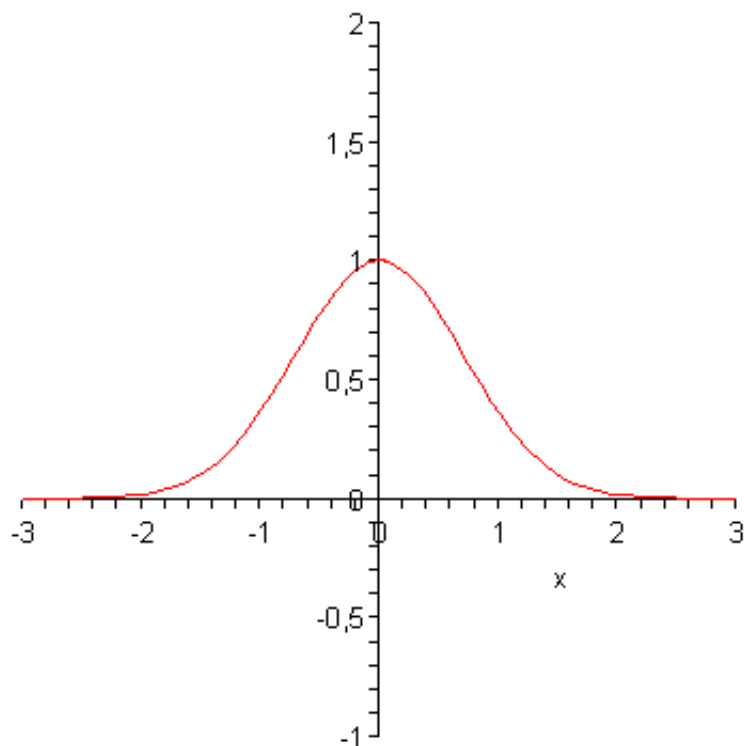
Aufgabe 5 (Gruppe Edinburgh - Aaron, Larissa, Polina, Ugur) Die Funktion f sei gegeben durch $f(x) = e^{2x} \cdot (x-1)^2$. Führen Sie eine Kurvendiskussion durch. Der Graph von f und die x -Achse, umschließen eine nach links offene Fläche. Welches Volumen hat der Rotationskörper, der entsteht, wenn diese Fläche um die x -Achse rotiert?^(***)

Aufgabe 6 (Gruppe Freetown - Joscha, Serkan, Thao) Die Funktion f sei gegeben durch $f(x) = x^2 \cdot e^{1-2x}$. Führen Sie eine Kurvendiskussion durch. Wie groß ist die Fläche, die von der Wendetangente des am weitesten rechts gelegenen Wendepunktes, der y -Achse und der x -Achse eingegrenzt ist?^(*)

2 Lösungen

Lösung 1 (Anchorage) *Unter dem Vorbehalt etwaiger Rechenfehler:*

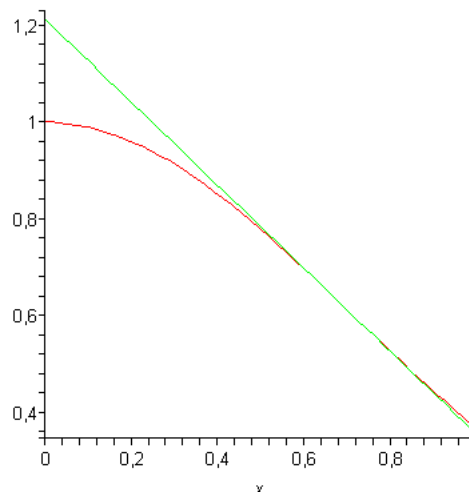
- $D_f = \mathbf{R}, W_f = \{x \in \mathbf{R} | 0 < x \leq 1\}$
- Es ist $f(x) = f(-x)$, also verläuft die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse.
- $f'(x) = (-2x) \cdot e^{-x^2}$
- $f''(x) = (4x^2 - 2) \cdot e^{-x^2}$
- $f'''(x) = (12x - 8x^3) \cdot e^{-x^2}$
- Die Funktion hat keine Nullstelle.
- Extrema: $E_1(0|1)$ ist ein relatives Maximum.
- Wendepunkte: $W_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}|e^{-\frac{1}{2}}\right)$ und $W_2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}|e^{-\frac{1}{2}}\right)$
- Der Graph



- Die Gleichung der gesuchten Wendetangente lautet:

$$t(x) = -\sqrt{\frac{2}{e}} \cdot x + \frac{2}{\sqrt{e}}$$

Die Wendetangente liegt links ihres Wendepunktes oberhalb des Graphen von f .



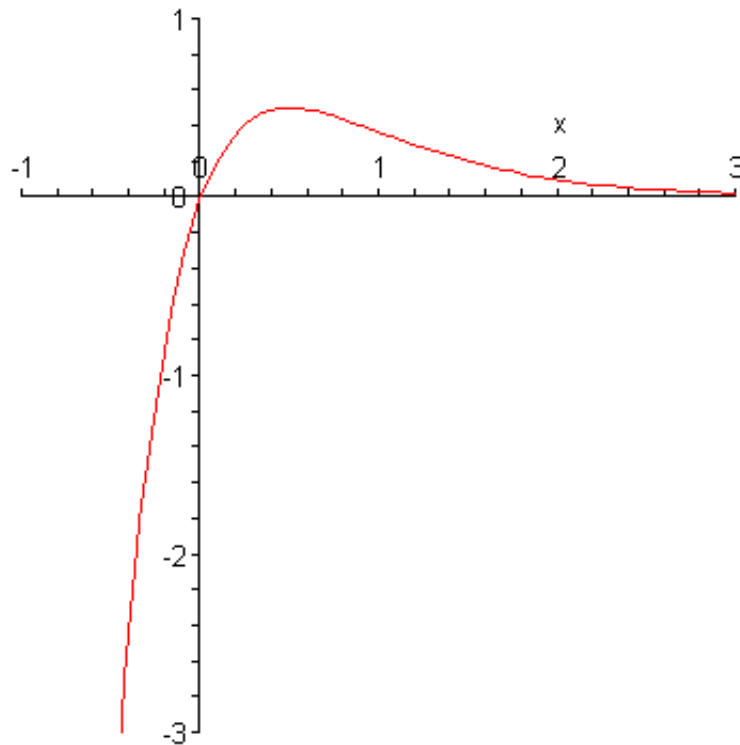
- Der Flächeninhalt der gesuchten Fläche ergibt sich mit der obigen Gleichung der Wendetangente t als

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} t(x) - f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} t(x) dx - \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} f(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} -\sqrt{\frac{2}{e}} \cdot x + \frac{2}{\sqrt{e}} dx - \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

Das letzte Integral kann allerdings nur näherungsweise berechnet werden, da zur Funktion f keine Stammfunktion in der üblichen Art existiert.

Lösung 2 (Brüssel) *Unter dem Vorbehalt etwaiger Rechenfehler:*

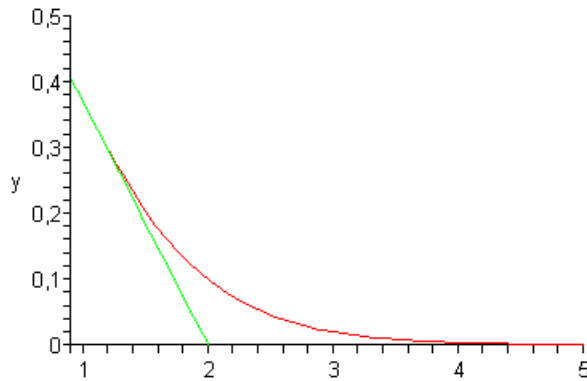
- $D_f = \mathbf{R}, W_f = \{x \in \mathbf{R} | x \leq \frac{1}{2}\}$
- Es liegt keine Symmetrie vor.
- $f'(x) = (1 - 2x)e^{(1-2x)}$
- $f''(x) = (4x - 4)e^{(1-2x)}$
- $f'''(x) = (12 - 8x)e^{(1-2x)}$
- Einzige Nullstelle ist $N(0|0)$.
- Extrema: $E_1 \left(\frac{1}{2} | \frac{1}{2}\right)$ ist als relatives Maximum der einzige relative Extremwert, es ist zugleich auch ein globales Maximum.
- Wendepunkte: $W_1 \left(1 | \frac{1}{e}\right) \approx (1 | 0,368)$
- Der Graph



- Die Gleichung der gesuchten Wendetangente lautet:

$$t(x) = -\frac{1}{e}x + \frac{2}{e}$$

Die Wendetangente liegt rechts ihres Wendepunktes unterhalb von f .



- Wie aus der Zeichnung zu entnehmen ist, sollte die zu untersuchende Fläche in zwei Teile unterteilt werden. Die Fläche A_1 liegt zwischen dem Graphen von f und der Wendetangente, die Fläche A_2 liegt zwischen dem Graphen von f und der x -Achse. Entscheidend ist die Nullstelle der Wendetangente, sie liegt bei $x = 2$. Mit der obigen Gleichung der Wendetangente folgt:

$$A = A_1 + A_2 \quad (1)$$

$$= \int_1^2 f(x) - t(x) dx + \int_2^\infty f(x) dx \quad (2)$$

$$= \int_1^2 x e^{1-2x} - \left(-\frac{1}{e}x + \frac{2}{e} \right) dx + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_2^k x e^{1-2x} \quad (3)$$

$$= \left[-\frac{1}{4} (1 + 2x) e^{1-2x} - \left(-\frac{1}{2e} x^2 + \frac{2}{e} x \right) \right]_1^2 + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_2^k x e^{1-2x} \quad (4)$$

$$= \frac{1}{4e} - \frac{5}{4e^3} + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_2^k x e^{1-2x} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{4e} - \frac{5}{4e^3} + \lim_{k \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{4} (1 + 2x) e^{1-2x} \right]_2^k \quad (6)$$

$$= \frac{1}{4e} - \frac{5}{4e^3} + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{4} (1 + 2k) e^{1-2k} - \left(-\frac{1}{4} (1 + 4) e^{1-4} \right) \right) \quad (7)$$

$$= \frac{1}{4e} - \frac{5}{4e^3} + 0 + \frac{1}{4} 5e^{-3} \quad (8)$$

$$= \frac{1}{4e} - \frac{5}{4e^3} + \frac{5}{4e^3} \quad (9)$$

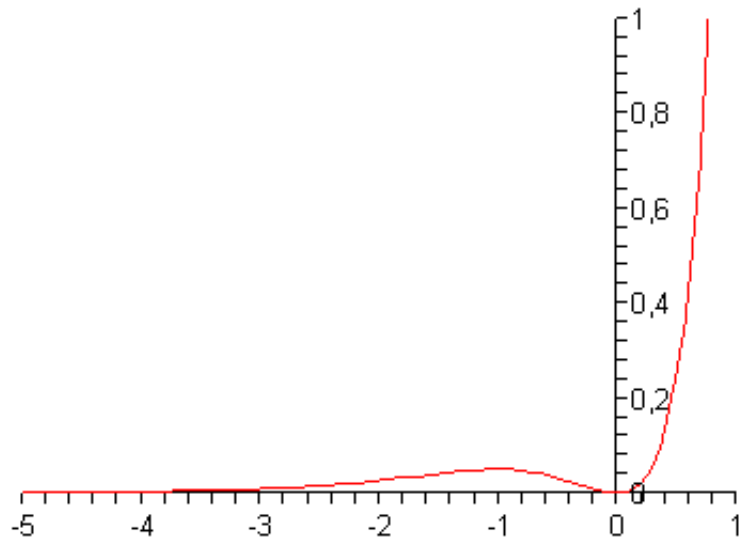
$$= \frac{1}{4e} \quad (10)$$

$$\approx 0,09FE \quad (11)$$

In den Umformungen von (3) nach (4) bzw. (5) nach (6) wurden die Integral über $f(x)$ mit Hilfe der partiellen Integration (Produktintegration) bestimmt.

Lösung 3 (Caracas) *Unter dem Vorbehalt etwaiger Rechenfehler:*

- $D_f = \mathbf{R}, W_f = \mathbf{R}^+$
- *Es liegt keine Symmetrie vor.*
- $f'(x) = (2x + 2x^2) e^{2x-1}$
- $f''(x) = (4x^2 + 8x + 2) e^{2x-1}$
- $f'''(x) = (8x^2 + 24x + 12) e^{2x-1}$
- *Einzig (und doppelte) Nullstelle ist $N(0|0)$.*
- *Extrema: $E_1\left(-1|\frac{1}{e^3}\right) \approx (-1|0,05)$ ist ein relatives Maximum, $E_2(0|0)$ ist ein relatives Minimum*
- *Wendepunkte: $W_1\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}|0.018\right)$ und $W_2\left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}|0.035\right)$*
- *Der Graph*



- Die gesuchte Gesamtfläche wird durch ein uneigentliches Integral bestimmt:

$$A_G = \int_{-\infty}^0 x^2 \cdot e^{(1-2x)} dx \quad (12)$$

$$= \lim_{k \rightarrow -\infty} \int_k^1 x^2 \cdot e^{(1-2x)} dx \quad (13)$$

$$= \lim_{k \rightarrow -\infty} \left[\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) e^{2x-1} \right]_k^0 \quad (14)$$

$$= \lim_{k \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{4e} - \left(\frac{k^2}{2} - \frac{1}{2}k + \frac{1}{4} \right) e^{2k-1} \right) \quad (15)$$

$$= \frac{1}{4e} - 0 \quad (16)$$

$$= \frac{1}{4e} \quad (17)$$

Von Zeile (13) nach (14) wurde das Integral durch zweimalige Produktintegration bestimmt.

Die gesuchte Normale ist einfach eine Paralle zur y-Achse mit $x = -1$. Der Teil der Fläche zwischen Hochpunkt und Null ist

$$\begin{aligned} A_1 &:= \int_{-1}^0 x^2 \cdot e^{(1-2x)} dx \\ &= \left[\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) e^{2x-1} \right]_{-1}^0 \\ &= -\frac{5}{4e^3} + \frac{1}{4e} \\ &= \frac{-5 + e^2}{4e^3} \end{aligned}$$

Die Fläche links des Hochpunktes ist demnach

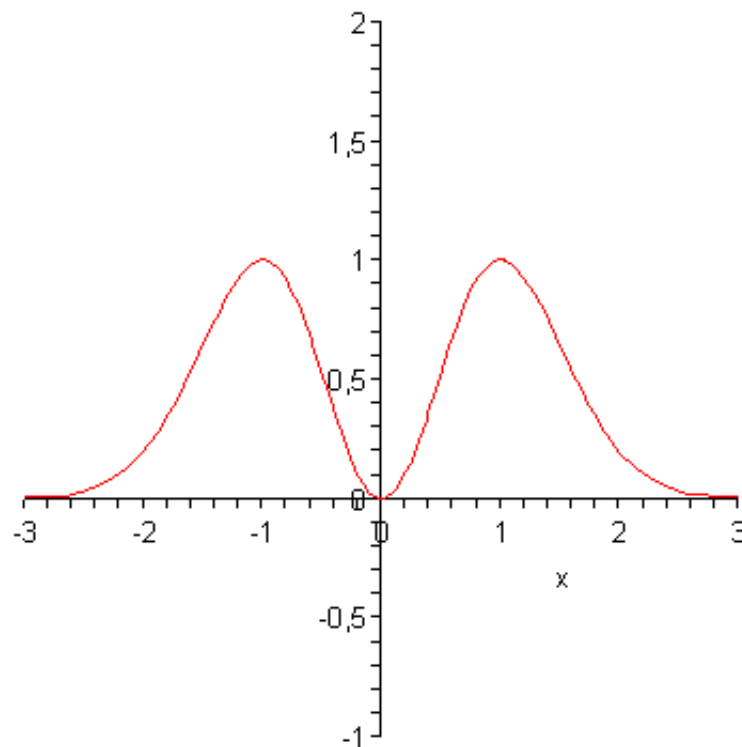
$$A_2 := A_G - A_1 = \frac{1}{4e} - \frac{-5 + e^2}{4e^3} = \frac{5}{4e^3}$$

Das Verhältnis ist

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{5}{4e^3}}{\frac{-5 + e^2}{4e^3}} = \frac{5}{4e^3} \cdot \frac{4e^3}{-5 + e^2} = \frac{5}{-5 + e^2}$$

Lösung 4 (Dublin) *Unter dem Vorbehalt etwaiger Rechenfehler:*

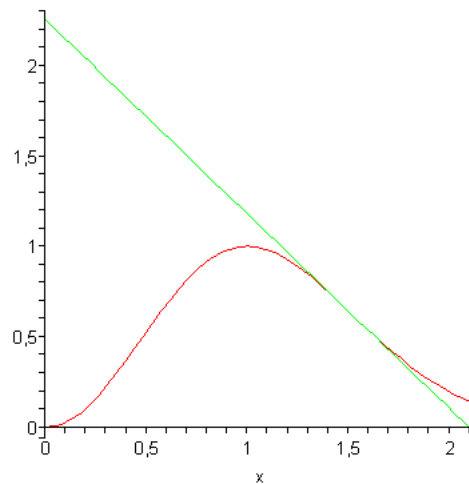
- $D_f = \mathbf{R}, W_f = \{x \in \mathbf{R} | 0 \leq x \leq 1\}$
- Es ist $f(x) = f(-x)$, also verläuft die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse.
- $f'(x) = (2x - 2x^3) \cdot e^{1-x^2}$
- $f''(x) = (2 - 10x^2 - 4x^4) \cdot e^{1-x^2}$
- $f'''(x) = (-24x + 36x^3 - 8x^5) \cdot e^{1-x^2}$
- Einzige Nullstelle ist $N(0|0)$, dies ist eine doppelte Nullstelle.
- Extrema: $E_1(-1|1)$ ist ein relatives Maximum, $E_2(0|0)$ ist ein relatives Minimum, $E_3(1|1)$ ist ein relatives Maximum.
- Wendepunkte: $W_1\left(-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5 - \sqrt{17}} | 0,479\right)$, $W_2\left(-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5 + \sqrt{17}} | 0,634\right)$,
 $W_3\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5 - \sqrt{17}} | 0,479\right)$, $W_4\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5 + \sqrt{17}} | 0,634\right)$
- Der Graph



- Die Gleichung der gesuchten Wendetangente lautet:

$$t(x) = -1.0748x + 2.2568$$

Die Wendetangente liegt links ihres Wendepunktes oberhalb des Graphen von f .

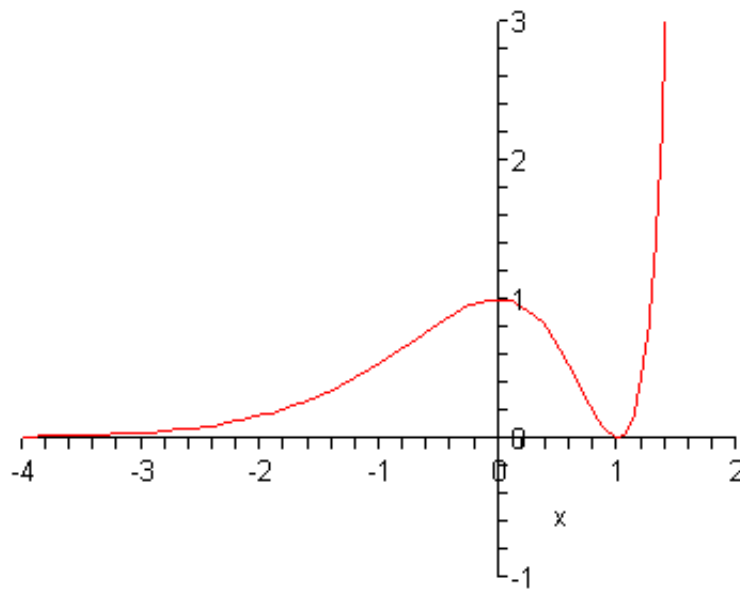


- Der Flächeninhalt der gesuchten Fläche ergibt sich mit der obigen Gleichung der Wendetangente t als

$$A = \int_0^{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5+\sqrt{17}}} t(x) - f(x) dx \approx 1,227FE$$

Lösung 5 (Edinburgh) *Unter dem Vorbehalt etwaiger Rechenfehler:*

- $D_f = \mathbf{R}, W_f = \mathbf{R}_0^+$
- Es liegt keine Symmetrie vor.
- $f'(x) = (2x^2 - 2x) \cdot e^{2x}$
- $f''(x) = (4x^2 - 2) \cdot e^{2x}$
- $f'''(x) = (8x^2 + 8x - 4) \cdot e^{2x}$
- Einzige und doppelte Nullstelle ist $N(1|0)$.
- Extrema: $E_1(0|1)$ ist ein relatives Maximum, $E_2(1|0)$ ist ein relatives Minimum.
- Wendepunkte: $W_1 \approx \left(\frac{\sqrt{2}}{2}|0,353\right) \approx (0,707|0,353)$ und $W_2 \approx \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}|0,708\right) \approx (-0,707|0,708)$
- Der Graph



Das Volumen ergibt sich durch

$$V = \pi \int_{-\infty}^1 (f(x))^2 dx \quad (18)$$

$$= \pi \int_{-\infty}^1 (x-1)^4 e^{4x} dx \quad (19)$$

$$= \pi \lim_{k \rightarrow -\infty} \int_k^1 (x-1)^4 e^{4x} dx \quad (20)$$

$$= \pi \lim_{k \rightarrow -\infty} \int_k^1 (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) e^{4x} dx \quad (21)$$

$$= \pi \lim_{k \rightarrow -\infty} \left(\int_k^1 x^4 e^{4x} dx - \int_k^1 4x^3 e^{4x} dx + \int_k^1 6x^2 e^{4x} dx \right. \quad (22)$$

$$\left. - \int_k^1 4x e^{4x} dx + \int_k^1 e^{4x} dx \right) \quad (23)$$

Die Integrale der letzten Zeil können alle durch ein- oder mehrfache Anwendung der Produktintegration bestimmt werden. Somit ergibt sich:

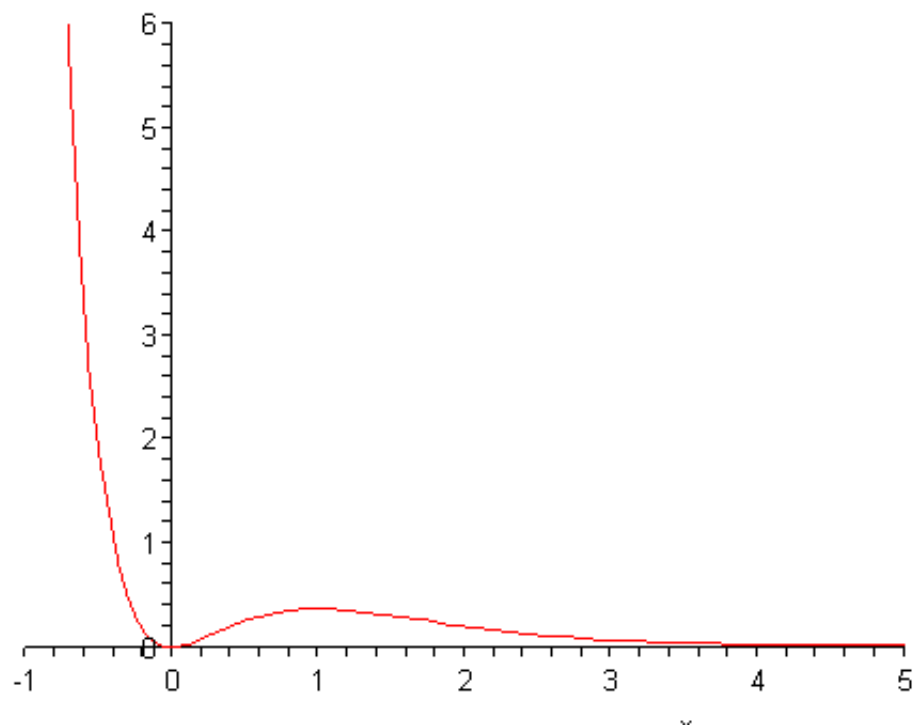
$$V = \pi \lim_{k \rightarrow -\infty} \left[\frac{(103 - 284x + 312x^2 - 160x^3 + 32x^4)}{128} \cdot e^{4x} \right]_k^1 \quad (24)$$

Wegen der Dominanz der e -Funktion für $k \rightarrow -\infty$ ergibt sich als Grenzwert und somit als das gesuchte Volumen:

$$V = \frac{103 - 284 + 312 - 160 + 32}{128} \cdot e^4 = \frac{3}{128} \cdot e^4 \approx 1,28 \text{ VE}$$

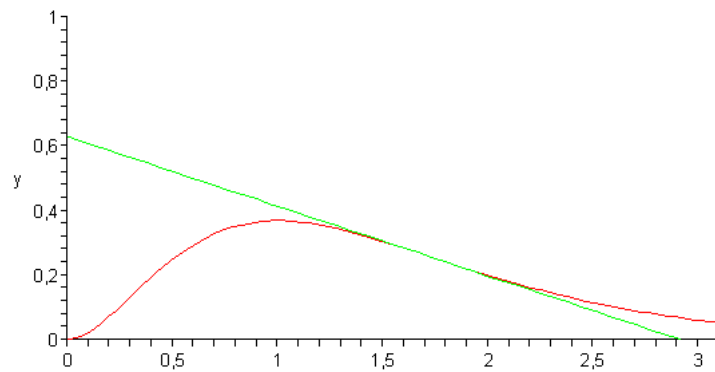
Lösung 6 (Freetown) Unter dem Vorbehalt etwaiger Rechenfehler:

- $D_f = \mathbf{R}, W_f = \mathbf{R}_0^+$
- Es liegt keine Symmetrie vor.
- $f'(x) = 2(x - x^2)e^{(1-2x)}$
- $f''(x) = 2(1 - 4x + 2x^2)e^{(1-2x)}$
- $f'''(x) = -4(3 - 6x + 2x^2)e^{(1-2x)}$
- Einzige und doppelte Nullstelle ist $N(0|0)$.
- Extrema: $E_1(0|0)$ ist ein relatives Maximum, $E_2\left(1|\frac{1}{e}\right)$ ist ein relatives Maximum.
- Wendepunkte: $W_1\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}|0,261\right)$ und $W_2\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}|0,13\right)$
- Der Graph



- Die Gleichung der gesuchten Wendetangente lautet nach runden:

$$t(x) = -0,216x + 0,629$$



Die gesuchte Fläche ist ein Dreieck. Sein Flächeninhalt ist der Wert des bestimmten Integrals über $t(x)$ von 0 bis zur Nullstelle von $t(x)$. Diese Nullstelle liegt bei etwa 2,914. Das bestimmte Integral kann einfach mit dem Taschenrechner berechnet werden. Die Fläche kann allerdings auch einfach elementargeometrisch berechnet werden:

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2,914 \cdot 0,629 \approx 0,917$$

3 Bildnachweise

Die Bilder der ersten Seite wurden allesamt aus der wikimedia entnommen, speziell

- Anchorage, Alaska
 - Urheber: Wonderlane
 - URL:http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Chugach_Mountains_from_Anchorage_%281%29.jpg?uselang=de
- Brüssel, Belgien
 - Urheber: Wouter Hagens
 - URL:http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Brussels_floral_carpet_B.jpg?uselang=de
- Caracas, Venezuela
 - Urheber: unbekannt
 - URL:http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Este_de_Caracas.JPG?uselang=de
- Dublin, Irland
 - Urheber: Hans-Peter Bock
 - URL:http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ireland_Dublin_Night.JPG?uselang=de
- Edinburgh, Schottland
 - Urheber: Tilmandralle
 - URL:http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Arthurs_seat_edinburgh.jpg?uselang=de
- Freetown, Sierra Leone
 - Urheber: David Hond
 - URL:http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Freetown_From_the_Air.jpg?uselang=de