

Abbildungsmatrix der Spiegelung an der Ebene $3x+y-z=0 \rightarrow n = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ich untersuche, wie die Vektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bei der Spiegelung abgebildet werden. Da die Fußpunkte aller drei Vektoren im Koordinatenursprung liegen, genügt es, den Bildpunkt der Spitze zu finden. Dazu finde ich jeweils die Lotgerade zu E , die durch die Spitze führt und sich den Punkt, der auf der Ebene steht, auf der anderen Seite von E so weit entfernt ist wie die Spitze.

Bild von $\vec{e}_1$: $\vec{e}_1'$?

Lotgerade g_1 : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$g_1 \cap E$: g_1 in E einzeichnen

$3(1+3r)+r+r=0 \Leftrightarrow 3+9r+r=0$

$\Leftrightarrow 3+11r=0 \quad | -3 \quad 11r=-3 \quad |:11$

$r = -\frac{3}{11}$

Lotfußpunkt L_1 : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{11} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{11} \\ -\frac{3}{11} \\ \frac{3}{11} \end{pmatrix}$

Bildpunkt: $r = 2 \cdot (-\frac{3}{11}) = -\frac{6}{11}$, da der Bildpunkt doppelt so weit von $\vec{e}_1$ entfernt ist wie L_1 .

$\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{6}{11} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{18}{11} \\ -\frac{6}{11} \\ \frac{6}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{18}{11} \\ -\frac{6}{11} \\ \frac{6}{11} \end{pmatrix}$

Somit ergibt sich die Abbildungsmatrix A durch die drei Bildvektoren $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$ wie folgt:

$A = \begin{pmatrix} \frac{18}{11} & -\frac{6}{11} & \frac{6}{11} \\ -\frac{6}{11} & \frac{9}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{6}{11} & \frac{2}{11} & \frac{9}{11} \end{pmatrix}$

Probe: $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ T.R.

Das passt, denn A^2 steht für die Hintereinanderausführung der Benennungsspiegelung. Diese ist natürlich die Abbildung, die alles wieder auf sich selbst abbildet.

Bild von $\vec{e}_2$: $\vec{e}_2'$?

Lotgerade g_2 : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$g_2 \cap E$: g_2 in E einzeichnen

$3(3r)+r+r=0 \Leftrightarrow 9r+r+r=0$

$\Leftrightarrow 11r+r=0 \quad | -11 \quad \Leftrightarrow 11r=-1 \quad |:11$

$r = -\frac{1}{11}$

Lotfußpunkt L_2 : $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{11} \\ \frac{10}{11} \\ \frac{1}{11} \end{pmatrix}$

Bildpunkt: $r = -\frac{2}{11}$ wie Links bestimmen.

$\vec{e}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{11} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{11} \\ \frac{9}{11} \\ \frac{2}{11} \end{pmatrix}$

Bild von $\vec{e}_3$: $\vec{e}_3'$?

Lotgerade g_3 : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$g_3 \cap E$: g_3 in E einzeichnen

$3(3r)+r-(1-r)=0$

$\Leftrightarrow 9r+r-1+r=0 \Leftrightarrow 11r-1=0 \quad |:11$

$\Leftrightarrow 11r=1 \quad |:11 \quad \Leftrightarrow r = \frac{1}{11}$

Lotfußpunkt L_3 : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} \\ \frac{10}{11} \end{pmatrix}$

Bildpunkt: $r = \frac{2}{11}$ wie Links.

$\vec{e}_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{11} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{11} \\ \frac{2}{11} \\ \frac{9}{11} \end{pmatrix}$